2. úkol na předmět
Vícekriteriální rozhodování
(eko404)

Optimalizace výroby firmy Radiace a.s.

Autor
Martin Šlouf
xslom03@vse.cz

23. května 2003

Obsah

1 Reálný problém

Reálie příkladu jsou zcela vymyšleny. Podobnost se skutečností je náhodná a je pravděpodobné, že mnou odhadovaná spotřeba materiálu se od skutečné bude lišit. Na logiku příkladu to však nemá vliv.

Firma Radiace a.s. vyrábí (nejen) ochranné obleky. Specializuje se na protichemické a antiradiační oblečení (výtečným výrobkem je zejména antiradiační oblek *novaja zemlja*[1]), ale v jejím výrobním programu lze nalézt řadu specialit (oblek pro argonauty).

Ochranné obleky se připravují z řady materiálů (typy obleků, druhy materiálů, ceny, spotřeba a kapacity viz tabulka 1). Výčet uvedených typů materiálů představuje většinou jistou agregaci různých příbuzných materiálů daného typu (výjimku pro svoji jedinečnost tvoří *Zlaté rouno* pro argonautský oblek).

Náklady na oblek jsou dány jednak spotřebovaným materiálem, testováním a konečně i mzdou vyplácenou pracovníkům (jsou shrnuty v tabulce 1).

Firma je omezena množstvím materiálu, musí se řídit objednávkami (je jisté minimální množství, které musí vyrobit) a musí brát v potaz celkovou poptávku (je jisté maximální množství, které může vyrobit).

[1]Novaja Zemlja – místo testů ruských jaderných pokusů.

Snahou firmy je maximalizovat (seřazeno podle významu):

1. Tržbu, z_1
2. Počet prodaných výrobků (chce si vydobýt silné postavení na trhu), z_2
3. Ekologii výroby (po skandálech na jaderných testech si snaží vylepšit reputaci na veřejnosti), z_3

Dovolil jsem si udělat malou změnu do zadání příkladu. Omezení mé úlohy v sobě mimo jiné obsahovaly i maximální možné limity vyrobených výrobků, což mělo simulovat omezenou poptávku po těchto výrobcích. S těmito limity však byly výsledky dílčích optimalizačních funkcí příliš málo rozmanité (viz dodatek A) a proto jsem tyto limity upravil, aby se dílčí optimální řešení více vzájemně lišila.

2 Ekonomický model

Všechny potřebné výchozí údaje shrnuje tabulka 1. Pouze pár poznámek:

- Cena je určena přibližně jako 1.5 – 2 násobek nákladů na oblek v závislosti na náročnosti testování.
- Dopad výrobku na ekologii je bodován (škála 1 – 10) — každý vyrobený oblek ovlivní životní prostředí — čím menší počet bodů, tím větší dopad na prostředí — příhodnější název by možná byl *neekologie* výroby.

3 Matematický model

Protože program Lingo umožňuje vcelku příjemný zápis matematického modelu a je na VŠE běžně používán, uvádím svůj matematický model v syntaxi programu Lingo (viz strana 4, kompletní výpis vstupu viz strana 9).

	rouška proti SARS	*oblek protichemického zamoření I*	*oblek protichemického zamoření II*	*antiradiační oblek*	*„novaja zemlja“*	*aquanaut*	*astronaut*	*argonaut*	*Cena za jednotku [tisíc Kč]*	*Množství na skladě [jednotka]*
Značení	*rous*	*chem_I*	*chem_II*	*antirad*	*nz*	*aqua*	*astro*	*argo*		
pytlovina [m²]	0.06	0.5	0.5	0	0	0	0	0	150	135
umělá vlákna [m²]	0	3	1	0.5	0	0	0	0	270	310
guma [m²]	0	0.5	2.5	0	0	0	0	0	205	250
plynová maska [kus]	0	1	1	0	0	0	0	0	630	175
olověná tkanina [m²]	0	0	0	3	2	0	0	0	470	770
kov [g]	0	0	0	1000	800	250	1000	0	8	325000
kosmické materiály [g]	0	0	500	750	4400	0	6300	0	99	1000000
neopren [m²]	0	0	0	0	0	4	0	0	510	220
různé [g]	5	1000	2000	2300	2500	1000	2800	500	7	16200000
zlaté rouno [m²]	0	0	0	0	0	0	0	3	4500	13
Materiálové náklady na oblek [tis.K]	0	9	65	100	460	11	651	17		
Prodejní cena za oblek [tis.K]	0.1	12.0	85.0	210.0	1200.0	20.0	1800.0	111.0		
Ekologie výroby [bod]	10	6	4	3	1	8	5	10		
Minimální vyrobené množství [kus]	500	40	50	80	150	30	8	3		
Maximální vyrobené množství [kus]	1500	100	120	190	250	60	16	4		

Tabulka 1: Ekonomický model

```
MODEL:

  ...

  ! trzby;
  z1 = 0.1 * rous + 12 * chem_I + 15 * chem_II + 210 * antirad +
       1200 * nz + 20 * aqua + 1800 * astro + 111 * argo;

  ! pocet;
  z2 = rous + chem_I + chem_II + antirad + nz + aqua + astro + argo;

  ! ekologie vyroby;
  z3 = 10 * rous + 6 * chem_I + 4 * chem_II + 3 * antirad +
       1 * nz + 8 * aqua + 5 * astro + 10 * argo;

  ! vlastni omezeni;

  0.06 * rous + 0.5 * chem_I + 0.5 * chem_II <= 135;
  3 * chem_I + 1 * chem_II + 0.5 * antirad <= 310;
  0.5 * chem_I + 2.5 * chem_II <= 250;
  1 * chem_I + 1 * chem_II <= 175;
  3 * antirad + 2 * nz <= 770;
  1000 * antirad + 800 * nz + 250 * aqua + 1000 * astro <= 325000;
  500 * chem_I + 750 * antirad + 4400 * nz + 6300 * astro <= 1000000;
  4 * aqua <= 220;
  5 * rous + 1000 * chem_I + 2000 * chem_II + 2300 * antirad +
  2500 * nz + 1000 * aqua + 2800 * astro + 500 * argo <= 16200000;
  3 * argo <= 13;

  ! dalsi omezeni;

  rous >= 500;  rous <= 1500;
  chem_I >= 40;  chem_I <= 100;
  chem_II >= 50;  chem_II <= 120;
  antirad >= 80;  antirad <= 190;
  nz >= 150;  nz <= 250;
  aqua >= 30;  aqua <= 60;
  astro >= 8;  astro <= 16;
  argo >= 3;  argo <= 4;

  ...

END
```

3.1 Dílčí optimalizace

1. *Tržby (z_1):*

   Hodnota účelové funkce:
   $\mathbf{z_1} = \mathbf{272799}$
   $z_2 = 1663$
   $z_3 = 13230$

   Hodnoty proměnných:
   $X =$ (rous, chem_I, chem_II, antirad, nz, aqua, astro, argo)
   $X = (1150, 40, 92, 128, 178, 55, 16, 4)$

2. *Počet výrobků (z_2).*

$z_1 = 272114$
$\mathbf{z_2 = 1980}$
$z_3 = 16593$

$X = (1500, 40, 50, 139, 176, 55, 16, 4)$

3. *Ekologie výroby (z_3).*

   $z_1 = 245684$
   $z_2 = 1972$
   $\mathbf{z_3 = 16619}$

   $X = (1500, 40, 50, 156, 151, 55, 16, 4)$

4 Řešení

4.1 Minimalizace vzdálenosti od ideálního řešení

V úvodu jsem uvedl význam jednotlivých kriteriálních funkcí — tomu odpovídá i určení vah $v = (0.40, 0.35, 0.25)$.

Pro nalezení kompromisního řešení poslouží tato minimalizační funkce:
$z = 0.40 \times (1 - \frac{z_1}{272799}) + 0.35 \times (1 - \frac{z_2}{1980}) + 0.25 \times (1 - \frac{z_3}{16619}) \rightarrow MIN$
Výpočtem v programu Lingo bylo získáno toto řešení:

- Vektor proměnných:

  $X = (1500, 40, 50, 139, 176, 55, 16, 4)$

- Vektor kriteriálních hodnot:

  $z = (272114, 1980, 16593)$

Jak vidno, u druhé kriteriální funkce je dosaženo maxima, druhé dvě hodnoty jsou mírně pod svým maximem.

4.2 Cílové programování

Předpokládejme, že firma Radiace a.s. by ráda dosáhla bezpodmínečně zisku alespoň 272700 a zároveň by chtěla dodat na trh alespoň 1950 výrobků. Ekologie ji již tak moc nezajímá (příliš nevynáší) ačkoli i tam by ráda dosáhla pokud možno co nejlepších výsledků. Tyto hodnoty byly zvoleny na základě znalosti dosavadních výsledků.

Tomu odpovídá minimalizační funkce:
$z = d_1^+ + d_2^+ + d_3^- \rightarrow MIN$, kde

d_1^+ udává, o kolik byl překročen požadovaný zisk
d_2^+ udává, o kolik byl překročen požadovaný počet výrobků
d_3^- udává, o kolik nebyla dosažena ideální hodnota ekologie výroby (d_3^+ nemá smysl uvažovat, protože ideální hodnota nebude nikdy překročena)

Jednotlivé kriteriální funkce vstupují do podmínek úlohy (kompletní model viz strana 9).

Bohužel se ukázalo, že k dosažení takového zisku musí firma radikálně snížit vyráběné množství a musí se soustředit na rentabilní výrobky (antiradiační oblek, novaja zemlja, astronaut) — Radiace a.s. se musela rozhodnout, zda a jaké cíle upravit.

Protože tržby byly pro firmu hodně důležité, rozhodla se snížit počet výrobků na hodnotu 1800 a všechny zbylé kapacity věnovat na výrobu drahých obleků. Experimentálně bylo ověřeno, že při výrobě 1800 výrobků a víceméně ignoraci ekologické výroby lze dosáhnout tržeb 272529 tisíc Kč. (Dokonce bylo vyrobeno o 2 výrobky více, tj. 1802 a získáno dalších pár korun navíc ☺.)

Shrnuto: Při stanovení těchto upravených cílů, tržby minimálně 272500 tisíc Kč, počet kusů minimálně 1800 a ekologie výroby maximálně 16619 bodů (ideální hodnota, čekalo se, že skutečná bude hluboko pod tímto limitem), bylo výpočtem v programu Lingo bylo získáno toto řešení:

- Vektor proměnných:

  $X = (1308, 40, 73, 128, 178, 55, 16, 4)$

- Vektor kriteriálních hodnot:

  $z = (272529.8, 1802, 14734)$

4.3 Řešení podle minimální komponenty

Pro toto řešení byl sestaven model v programu Lingo (viz strana 9).

Získané výsledky jsou tyto:

- Vektor proměnných:

  $X = (1500, 40, 50, 140, 175, 55, 16, 4)$

- Vektor kriteriálních hodnot:

  $z = (271124, 1980, 16595)$

Je vidět, že jsou téměř totožné s výsledky metody minimalizace vzdálenosti od ideální varianty (viz 4.1) a také v podstatě totožné s minimálními odlišnostmi ve struktuře výroby s dílčí optimalizací podle funkce z_2 (počet výrobků).

4.4 Lexikograficky kompromisní řešení

Stejně jako v úkolu číslo 1, i zde volím tuto metodu pouze pro zajímavost. Její výsledky lze komentovat velmi krátce — již v první (nejdůležitější) jednokriteriální dílčí optimalizaci funkce z_1 (tržby) existuje jediné optimální řešení, které je tudíž kompromisním řešením této metody, viz 3.1.

- Vektor proměnných:
  $X = (1150, 40, 92, 128, 178, 55, 16, 4)$
- Vektor kriteriálních hodnot:
  $z = (272799, 1663, 13230)$

5 Diskuse

Hned na úvod musím přiznat, že nejsem úplně spokojen s tímto úkolem, protože se mi nepodařilo zahrnout žádnou interaktivní metodu (GDF, STEM). Důvod není nijak racionální — domácí úkol byl vypracován na mém domácím počítači s programovým vybavením OS Linux, Lingo a matematický program R — neměl jsem tudíž šanci nějak snadno (rozuměj: jinak než ručně) určit výsledky těchto metod. Toto není omluva (mohl jsem tyto metody vypracovat ve škole), pouze vysvětlení. Na druhou stranu jsem splnil formální nároky na domácí úkol — počet kriteriálních funkcí, proměnných i použitých metod odpovídá požadavkům, či je převyšuje.

Tabulka 2 shrnuje výsledky jednotlivých metod.

Metoda	*vektor X*	*vektor z*
Minimalizace vzdálenosti od ideální varianty	$X = (1500, 40, 50, 139, 176, 55, 16, 4)$	$z = (272114, 1980, 16593)$
Cílové programování	$X = (1308, 40, 73, 128, 178, 55, 16, 4)$	$z = (272529.8, 1802, 14734)$
Řešení podle minimální komponenty	$X = (1500, 40, 50, 140, 175, 55, 16, 4)$	$z = (271124, 1980, 16595)$
Lexikograficky kompromisní řešení	$X = (1150, 40, 92, 128, 178, 55, 16, 4)$	$z = (272799, 1663, 13230)$

Tabulka 2: Výsledky

Přes moji snahu mírně modifikovat zadání, aby výsledky byly trochu rozmanitější, lze říci, že jednotlivé metody se mezi sebou příliš neliší. Přesto lze vyvodit pár závěrů:

- Od jistého okamžiku existuje velká míra substituce mezi z_1 a ostatními funkcemi — to se nejvíce projevilo při cílovém programování, kdy dosáhnout téměř ideálních hodnot bylo snadné (hranice cca 272 mil. Kč), ovšem při snaze zvýšit tržby ještě o trochu, ostatní kriteriální funkce (počet výrobků a ekologie výroby) se značně vzdalovaly od svých ideálních hodnot. Koneckonců to potvrzuje i dílčí optimalizace z_1.

Vysvětlení je celkem logické — největší tržby přinášejí nejdražší a nejméně ekologické obleky.

- Ze shodnosti výsledků usuzuji na malou provázanost výroby — existuje pouze několik materiálů používaných na více výrobků a těch je dostatek. Ostatní materiály jsou celkem specifické (neopren, zlaté rouno, plynová maska) a proto počet možných výrobků je téměř vždy stejný.

  Možná jsem raději mohl místo rozšíření intervalů (tj. navýšení poptávky) raději uvažovat o větší provázanosti jednotlivých materiálů a snížení některých objemů na skladě. Nechtěl jsem však příliš zasahovat do zadání a navíc, takovéto změny je velmi snadné provést — můj model v programu Lingo obsahuje řadu proměnných, kdy pouze změnou několika hodnot a vhodným zakomentováním řádků lze pozměnit zadání příkladu tímto směrem.

- Kriteriální funkce z_2 byla volena jako ukazatel objemu trhu (čím více výrobků, tím větší objem trhu firma získá). To však není nijak ideální ukazatel — odhlédneme-li od mých vymyšlených reálií, trh obleků pro astronauty bude asi značně jiný, než trh roušek proti SARS. Položit substituci mezi (například) 300 roušek = 1 skafandr nevypadá příliš logicky — to je ovšem přesně to, co funkce z_2 dělá.

  Příště by nejspíš bylo vhodné zvolit nějaké bodování zahrnující v sobě pracnost výroby, celkový význam výrobku oproti ostatním, ... (podobně jako u ekologie výroby). Sice by se tento ukazatel hůře interpretoval, ale věřím, že by byl lepší, než prostý součet vyrobených kusů.

A Hodnoty dílčích optimalizačních funkcí původního zadání

1. *Tržby (z_1):*

   Hodnota účelové funkce:
   $\mathbf{z_1 = 269906}$
   $z_2 = 1654$
   $z_3 = 13452$

   Hodnoty proměnných:
   $X =$ (rous, chem_I, chem_II, antirad, nz, aqua, astro, argo)
   $X = (1200, 51, 70, 82, 196, 43, 8, 4)$

2. *Počet výrobků (z_2).*

   $z_1 = 269186$
   $\mathbf{z_2 = 1660}$
   $z_3 = 13487$

   $X = (1200, 56, 70, 84, 195, 43, 8, 4)$

3. *Ekologie výroby (z_3).*

   $z_1 = 266750$
   $z_2 = 1658$
   $\mathbf{z_3 = 13509}$

   $X = (1200, 68, 58, 84, 193, 43, 8, 4)$

Je vidět, že hodnoty účelových funkcí jsou téměř stejné — aby výsledky byly zajímavější, upravil jsem původní limity — většinou jsem je rozšířil.

B Kompletní výpis modelu v programu Lingo

```
MODEL:

  ! vhodnym zakomentovanim / odkomentovanim prislusnych radku lze ziskat kyzeny vysledek;

!  MAX = z;
!  MIN = z;

  ! kompromisni reseni podle minimalni komponenty;

!  z = delta;
!  z1 >= delta;
!  z2 >= delta;
!  z3 >= delta;

  ! cilove programovani;

!  z = d_1_plus + d_2_plus + d_3_minus;
!  cil1 = 272500;
```

```
!  cil2 = 1800;
!  cil3 = 16619;
!  z1 - d_1_plus = cil1;
!  z2 - d_2_plus = cil2;
!  z3 + d_3_minus = cil3;
!  d_1_plus >= 0;
!  d_2_plus >= 0;
!  d_3_minus >= 0;

  ! minimalizace vzdalenosti od idealniho reseni;

!  z = (v1 * (1 - z1/272799)) + (v2 * (1 - z2/1980)) + (v3 * (1 - z3/16619));
!  v1 = 0.4;
!  v2 = 0.35;
!  v3 = 0.25;

  ! trzby;

  z1 = 0.1 * rous + 12 * chem_I + 15 * chem_II + 210 * antirad +
       1200 * nz + 20 * aqua + 1800 * astro + 111 * argo;

  ! pocet;

  z2 = rous + chem_I + chem_II + antirad + nz + aqua + astro + argo;

  ! ekologie vyroby;

  z3 = 10 * rous + 6 * chem_I + 4 * chem_II + 3 * antirad +
       1 * nz + 8 * aqua + 5 * astro + 10 * argo;

  ! vlastni omezeni;

  0.06 * rous + 0.5 * chem_I + 0.5 * chem_II <= 135;
  3 * chem_I + 1 * chem_II + 0.5 * antirad <= 310;
  0.5 * chem_I + 2.5 * chem_II <= 250;
  1 * chem_I + 1 * chem_II <= 175;
  3 * antirad + 2 * nz <= 770;
  1000 * antirad + 800 * nz + 250 * aqua + 1000 * astro <= 325000;
  500 * chem_I + 750 * antirad + 4400 * nz + 6300 * astro <= 1000000;
  4 * aqua <= 220;
  5 * rous + 1000 * chem_I + 2000 * chem_II + 2300 * antirad +
  2500 * nz + 1000 * aqua + 2800 * astro + 500 * argo <= 16200000;
  3 * argo <= 13;

  ! dalsi omezeni;

  rous >= 500;
  rous <= 1500;
  chem_I >= 40;
  chem_I <= 100;
  chem_II >= 50;
  chem_II <= 120;
  antirad >= 80;
  antirad <= 190;
  nz >= 150;
  nz <= 250;
  aqua >= 30;
  aqua <= 60;
  astro >= 8;
  astro <= 16;
  argo >= 3;
  argo <= 4;
```

```
  ! celociselnost;

  @GIN(rous);
  @GIN(chem_I);
  @GIN(chem_II);
  @GIN(antirad);
  @GIN(nz);
  @GIN(aqua);
  @GIN(astro);
  @GIN(argo);

  ! nezapornost -- neni nutne s ohledem na "dalsi omezeni";

  rous >= 0;
  chem_I >= 0;
  chem_II >= 0;
  antirad >= 0;
  nz >= 0;
  aqua >= 0;
  astro >= 0;
  argo >= 0;

END
GO
QUIT
```